PRÉFACE

Les mathématiques forment une partie intégrante de notre quotidien, dont le déroulement se révèle sans cesse plus complexe. Dans le présent ouvrage, *Calcul différentiel,* nous avons cherché à illustrer ce point de vue en adoptant une approche résolument axée sur les applications des mathématiques. La rédaction du manuel visait deux objectifs : 1) favoriser la motivation des étudiants en mettant l'accent sur les applications du calcul différentiel et 2) fournir aux enseignants un outil d'enseignement efficace.

À l'enseignant

« J'avais déjà accumulé de nombreuses années d'enseignement quand j'ai décidé d'écrire le premier d'une série de livres de mathématiques pour les étudiants des sciences de la gestion, des sciences humaines et des sciences de la santé. L'expérience m'a démontré que bon nombre d'étudiants abordent leur cours de calcul avec une certaine appréhension. Ils s'interrogent aussi sur la pertinence d'apprendre les mathématiques dans leur domaine. Et suivre un cours qui se résume à une succession de formules n'est rien pour les rassurer, encore moins les motiver. Ce constat m'a fait voir la nécessité d'aborder l'étude du calcul par une approche intuitive.

Vous constaterez donc que dans ce livre, je présente chaque nouvelle notion au moyen d'un exemple de la vie réelle. Après avoir exposé l'idée générale, je prends soin de donner la définition exacte du concept, afin de ne rien perdre de la rigueur mathématique dans ce cheminement intuitif. J'ai également remarqué que les étudiants manifestent beaucoup plus d'intérêt pour les mathématiques quand les applications portent sur leur champ d'intérêt et que les exemples sont tirés du monde réel plutôt que fictifs. Voilà pourquoi tant d'exemples et d'exercices prennent leur source dans les organisations officielles connues et dans les médias écrits ou électroniques. Avec le résultat que les étudiants sont plus motivés. »

Soo Tan

Encore un livre de calcul différentiel ?

« Lorsque j'ai pris connaissance de ce livre, j'ai remarqué que, bien qu'on y retrouvait les thèmes habituellement abordés dans un premier cours de calcul différentiel, le volume se démarquait par un souci réel de faire comprendre les concepts aux étudiants, aussi bien par la clarté des explications que par la pertinence des applications. J'appréciais particulièrement les exemples tirés de la vie réelle. C'est pourquoi il a été convenu dès le début du projet d'adaptation de travailler dans un même esprit que l'auteur en insérant de nombreux exemples ou exercices construits à partir de contextes réels québécois ou canadiens.

Une autre particularité de l'ouvrage réside dans son recours fréquent à la calculatrice graphique. Comme professeure, j'apprécie grandement cet outil qui constitue un support intuitif majeur à la compréhension tout en se révélant plus convivial que l'ordinateur. Toutefois, son utilisation n'est pas indispensable ici, puisque les sections concernant la calculatrice sont présentées séparément du corps du texte.

Finalement, j'ai tenté, à l'image de l'auteur, de garder à l'esprit que je m'adressais directement à l'étudiant tout au long de l'ouvrage. »

Colette Messier

Caractéristiques

Voici quelques-uns des points forts de l'ouvrage:

- **Couverture des sujets** Le présent ouvrage contient tous les sujets qui doivent être abordés dans un cours de calcul différentiel appliqué. Les sections facultatives sont marquées d'un astérisque dans la table des matières, afin d'offrir à l'enseignante ou à l'enseignant un choix de thèmes appropriés.
- **Approche** Tout au long du volume, nous avons mis l'accent sur la résolution de problèmes. Nous présentons un grand nombre d'exemples ou de problèmes résolus afin de faciliter la compréhension par l'étudiant de chaque nouveau concept et de chaque nouveau résultat. Chaque fois que c'est possible, une figure vient illustrer les concepts.
- **Point de vue** Nous avons opté pour une approche intuitive et une présentation informelle des résultats, sans sacrifier pour autant la rigueur et la précision du contenu mathématique. Ainsi, nous avons inclus un certain nombre de preuves de résultats, qui peuvent cependant être omises.
- **Approche intuitive** Nous abordons les nouveaux concepts en faisant appel à une situation de la vie réelle. À titre d'illustration, voici quelques-uns des sujets ainsi présentés :
  - **Modélisation** Poids démographique du Québec dans le Canada
  - **Croissance et décroissance d'une fonction** Consommation d'essence d'une automobile
  - **Concavité** Croissance de la population mondiale et de la population canadienne
  - **Points d'inflexion** Le point de rendements décroissants
  - **Tracé de courbes** Fluctuations de l'indice Dow-Jones au cours du Lundi noir
  - **Extremums relatifs** Déficit budgétaire d'un pays
  - **Extremums absolus** Évolution du taux de natalité au Québec
  - **Fonctions exponentielles** Pourcentage d'alcool dans le sang d'une personne
  - **Différentielles** Calcul de versements hypothécaires

et, plus globalement,

- **Limites** Le concept est présenté au moyen de l'exemple du déplacement d'un Maglev; le même exemple est repris pour illustrer la notion de *dérivée*, le *théorème des valeurs intermédiaires* et les *primitives*, ce qui fait ressortir le lien entre ces différents concepts.

- **Applications** Le texte est axé sur les applications pratiques. Nous avons notamment tiré des domaines de l'administration, de l'économie, des sciences sociales, de la psychologie et des sciences de la nature de nombreuses applications intéressantes, pertinentes et d'actualité. Quelques-unes prennent leur source dans les journaux, les périodiques et autres magazines. Les applications se retrouvent aussi bien en tant qu'exemples dans le texte que dans les séries d'exercices proposés. Un des objectifs poursuivis consistait à inclure, chaque fois que c'était possible, au moins une situation réelle par section.

- **Sources** Nous avons fourni les sources des applications basées sur des situations réelles. Il est notamment question du coût d'utilisation d'une automobile, du déclin de la population au Saguenay-Lac-Saint-Jean, des dépenses des commissions scolaires canadiennes, de la prévalence de la maladie d'Alzheimer, des courriels non sollicités, des revenus de Google, de la croissance mondiale des cultures d'OGM et de l'évolution de la publicité en ligne.

2. DÉCLIN DE LA POPULATION DU SAGUENAY-LAC-SAINT-JEAN Selon des hypothèses fondées sur des tendances récentes, la population du Saguenay-Lac-Saint-Jean devrait diminuer sensiblement au cours des 25 prochaines années. La projection de la population $P(t)$ entre 2001 et 2026 est modélisée par la fonction

$$P(t) = -2{,}13t^3 + 85{,}09t^2 - 2119{,}13t + 283\,510 \quad (\text{pour } 0 \leq t \leq 25)$$

où t est mesuré en années, la valeur $t = 0$ correspondant au début de 2001.

a. Montrez que la population du Saguenay-Lac-Saint-Jean devrait diminuer constamment au cours de cette période.

Suggestion : Montrez que $P'(t) < 0$ pour tout t dans l'intervalle $]0, 25[$.

b. Trouvez à quel moment la population de la région Saguenay-Lac-Saint-Jean devrait diminuer le plus lentement.

Suggestion : Trouvez le point d'inflexion P dans l'intervalle $]0, 25[$.

Source: Institut de la statistique du Québec, Perspectives démographiques

- **Travail en équipes** La rubrique *Travail en équipes* porte sur des questions facultatives apparaissant dans le corps du texte, qui peuvent faire l'objet d'une discussion en classe ou d'un devoir. Les questions qui y sont abordées demandent généralement une réflexion plus poussée et plus d'effort que les autres exercices. Ils peuvent aussi servir à ajouter un volet «écriture» au travail des étudiants. Les solutions de ces exercices sont fournies dans le *Recueil de solutions*.

TRAVAIL EN ÉQUIPE

Le profit P du fabricant d'un logiciel dépend du nombre d'unités vendues. Le fabricant estime pouvoir vendre x unités de son logiciel par semaine. Supposez que $P = g(x)$ et que $x = f(t)$, où g et f sont des fonctions dérivables.

1. Trouvez une expression du taux de variation du profit par rapport au nombre d'unités vendues.

- **Situations réelles** Une partie importante des applications repose sur des modèles mathématiques (des fonctions) construits à partir de données recueillies auprès de diverses sources, comme les journaux, les magazines ou l'Internet, dont les références sont fournies à la fin de chaque exercice. Dans la section 2.3, Fonctions et modélisation, on demande aux étudiants de tracer le graphique de fonctions décrivant des situations réelles (le poids démographique du Québec dans le Canada et les dépenses en soins médicaux) et d'utiliser ceux-ci pour effectuer des projections dans l'avenir. Sous la rubrique *Technologie en application* qui suit, les étudiants apprennent comment utiliser une calculatrice graphique pour construire une fonction décrivant une situation réelle (la scolarité des Québécoises). Cette présentation est suivie d'exercices de modélisation à partir de situations réelles.

EXEMPLE 3

Scolarité des femmes Les données suivantes indiquent le nombre (en milliers) de Québécoises âgées de 15 ans et plus qui détenaient un certificat, un diplôme ou un grade universitaire entre 1981 ($t = 0$) et 2001 ($t = 20$).

Année	0	5	10	15	20
Diplômées (en milliers)	186,780	252,535	331,195	425,160	512,525

a. À l'aide d'une calculatrice graphique, trouvez une fonction polynomiale f de degré 4 qui modélise les données.

b. Tracez le graphique de la fonction f dans la fenêtre d'affichage $[0, 20] \times [0, 550]$.

c. Trouvez les valeurs $f(0), f(5), \ldots, f(20)$ en utilisant l'option d'évaluation de la calculatrice graphique et comparez ces valeurs avec les données empiriques.

Source: Statistique Canada, Recensements du Canada

- **Séries d'exercices** Les chapitres du volume comportent trois types d'exercices :
  - **Exercices d'autoévaluation** Chaque section comporte des exercices d'autoévaluation, de même que leurs solutions, afin que les étudiants puissent mesurer leur progression.

EXERCICES D'AUTOÉVALUATION 3.3

Les solutions des exercices d'autoévaluation 3.3 se trouvent à la page 178.

1. Calculez la dérivée de la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 1}}$$

2. Supposons que l'espérance de vie (en années) d'une femme dans un certain pays soit modélisée par la fonction

$$g(t) = 50{,}02(1 + 1{,}09t)^{0{,}1} \qquad (\text{pour } 0 \le t \le 150)$$

- **Exercices** Chaque section de l'ouvrage est suivie d'une série d'exercices dont la première partie met l'accent sur la pratique des techniques nouvellement acquises et la seconde partie, sur des applications à une variété de situations.

3.3 EXERCICES

1–38 Calculez la dérivée des fonctions indiquées.

1. $f(x) = (2x - 1)^4$ **2.** $f(x) = (1 - x)^3$

3. $f(x) = (x^2 + 2)^5$ **4.** $f(x) = (2x - x^2)^3$

16. $f(t) = (5t^3 + 2t^2 - t + 4)^{-3}$

17. $f(x) = (x^2 + 1)^3 - (x^3 + 1)^2$

18. $f(t) = (2t - 1)^4 + (2t + 1)^4$

- **Exercices récapitulatifs** On retrouve, à la fin de chaque chapitre, des exercices sur l'ensemble des techniques vues dans le chapitre, suivis de problèmes d'applications.

SOLUTIONS DES EXERCICES D'AUTOÉVALUATION 3.3

1. On récrit la fonction sous la forme

$$f(x) = -(2x^2 - 1)^{-1/2}$$

Selon la formule (3),

$$f'(x) = -\frac{d}{dx}(2x^2 - 1)^{-1/2}$$

soit environ 78 ans. De même, l'espérance de vie d'une femme née au début de l'an 2000 est

$$g(100) = 50{,}02[1 + 1{,}09(100)]^{0{,}1} \approx 80{,}04$$

soit environ 80 ans.

b. Le taux de variation de l'espérance de vie d'une femme née à l'instant t est $g'(t)$. Selon la formule (3),

$$g'(t) = 50{,}02\frac{d}{dt}(1 + 1{,}09t)^{0{,}1}$$

Technologie

Technologie et intuition

Les questions facultatives apparaissant dans cette section visent à favoriser chez les étudiants une meilleure compréhension des concepts. Les solutions complètes de ces exercices sont fournies dans le *Solutionnaire*.

TECHNOLOGIE ET INTUITION

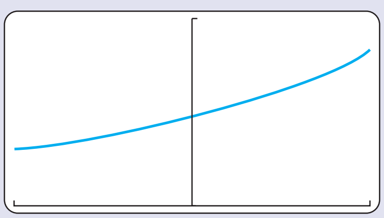
Dans le premier paragraphe de la section 5.1, nous avons souligné que la valeur acquise d'un placement à capitalisation continue dépasse grandement la valeur acquise d'un placement à intérêt simple au même taux d'intérêt nominal. L'exemple suivant en est une illustration.

Technologie en application

Les rubriques Technologie en application, dont l'étude est facultative, apparaissent à la fin des sections et proposent divers moyens d'utiliser les calculatrices graphiques pour appliquer les notions de calcul différentiel présentées. Les explications sont illustrées par de nombreuses représentations d'écrans de calculatrices graphiques, que viennent compléter des exemples et des exercices dont les réponses sont fournies à la fin du volume. Ces rubriques peuvent être étudiées en classe ou laissées à l'étudiant en tant qu'enrichissement. De nombreuses applications pertinentes et d'actualité fournissent à l'étudiant l'occasion d'interpréter les résultats obtenus dans des situations réelles.

Technologie en application

EXEMPLE 1



Au début de la section 5.4, nous avons illustré le résultat

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

en construisant un tableau des valeurs de $(e^h - 1)/h$ pour des valeurs de h voisines de 0.

Nous pouvons arriver au même résultat en représentant graphiquement la fonction

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

EXERCICES AVEC LA CALCULATRICE GRAPHIQUE

1–6 Utilisez l'option de dérivation numérique pour trouver le taux de variation de $f(x)$ pour la valeur de x donnée. Conservez quatre décimales de précision.

1. $f(x) = x^3 e^{-1/x}$; $x = -1$

2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^{3/2} e^{-x}$; $x = 0{,}5$

8. **Taux d'alcool dans le sang** Le pourcentage d'alcool présent dans le sang d'une personne t h après qu'elle ait absorbé 250 ml de whisky est modélisé par

$$A(t) = 0{,}23te^{-0{,}4t} \qquad (\text{pour } 0 \leq t \leq 12)$$

a. Tracez le graphique de $A(t)$ dans la fenêtre [0, 12]

Compléments

■ Un *Solutionnaire* présente les solutions de tous les exercices. Ce solutionnaire est disponible sur cédérom à l'intention de l'enseignant ayant adopté l'ouvrage pour ses étudiants. Le cédérom contient également un diaporama PowerPoint.